Exponentes y Radicales

Introducción

El Álgebra es la rama de las matemáticas que estudia las estructuras, relaciones y cantidades. Junto a la Geometría, el Análisis Matemático, la Combinatoria y la Teoría de Números, el Álgebra es una de las principales ramas de la matemática.

Mientras que en aritmética sólo se analizan los números y sus operaciones aritméticas elementales (adición, sustracción, multiplicación, y división), en Álgebra también se utilizan símbolos para denotar números.

El elemento básico del Álgebra es el llamado **término**, que son productos, potencias o cocientes de números y letras; dependiendo de cuantos términos contenga una expresión algebraica, ésta se clasificará en **monomio**, **binomio**, **trinomio** o **polinomio**.

Cada término algebraico está compuesto por tres elementos básicos: el **coeficiente**, que es el número que multiplica a la incógnita; la literal o **variable**, es la representación de la incógnita dentro del término; y el **exponente** o índice, que es el número que acompaña a la variable en su ángulo superior derecho. El signo se debe considerar como parte del coeficiente. Ejemplo:

Coeficiente $\longrightarrow$ $-4y^3$ $\longleftarrow$ *Exponente*

Variable

Propiedades de los exponentes

Potenciación. Si n es un número entero, entonces el término a^n representa el producto de n términos a; es decir,

$$a^n = \underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \underset{3}{a} \cdot \underset{4}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{n}{a}$$

En el término a^n, a es llamada base y n el exponente. Este término se puede leer como **la potencia enésima de a o a a la enésima potencia.**

Las propiedades de la potenciación permiten resolver por diferentes métodos una potencia.

<u>Potencia de exponente 0</u>. La definición de potenciación se puede confirmar por recursión:

$$a^n = a \cdot a^{n-1}$$
$$a^{n-1} = a \cdot a^{(n-1)-1}$$

De esta situación se puede llegar a deducir que toda potencia de base distinta de cero sufre que $a^0 = 1$. La expresión 0^0 es una indeterminación; puede relacionarse con la indeterminación cero entre cero.

Potencia de exponente 1. Toda potencia de exponente uno es igual a la base, o $a^1 = a$. En este caso, se tiene que la potencia uno es el número ordinario sin operar.

Producto de potencias de igual base. El producto de dos o más potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la suma de los correspondientes exponentes; es decir, cuando las mismas bases se multiplican, los exponentes se suman:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

División de potencias de igual base. La división de dos potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la resta de los exponentes respectivos; es decir, cuando se dividen las mismas bases, los exponentes se restan:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potencia de un producto o una división. La potencia de un producto, o una división, de bases diferentes es igual al producto, o cociente, de las potencias; es decir,

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Análogamente,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^m}$$

Potencia de una potencia. La potencia de una potencia de base a es igual a la base elevada a la multiplicación de ambos exponentes; es decir, se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Potencia de exponente fraccionario. Es una potencia que tiene su exponente en forma de fracción; este tipo de expresiones representan el inverso de la potenciación: la radicación. Por lo tanto, las potencias de exponente fraccionario cumplen que

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &= (a^m)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

Potencia de exponente negativo. Es una potencia que tiene su exponente negativo; representa el inverso multiplicativo de su contraparte con exponente positivo. Es decir,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se debe hacer hincapié en que esta propiedad sólo es válida cuando la base es diferente de cero.

Propiedades de los radicales

Radicales. Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, la cual denota la raíz enésima principal de a. El entero positivo n es llamado índice u orden, en tanto que el número a es el radicando.

Las propiedades de los radicales son iguales a las propiedades de los exponentes, puesto que una raíz es una potencia con exponente fraccionario.

Raíz de un producto. La raíz enésima de un producto es igual al producto de la raíz enésima del primer factor por la raíz enésima del segundo factor; es decir,

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Raíz de un cociente. La raíz enésima de un cociente es igual al cociente de la raíz enésima del numerador entre la raíz enésima del denominador:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Potencia de una raíz. Al elevar una raíz a una potencia, tanto una operación como la otra pueden intercambiarse sin afectar el resultado; o sea, elevar una raíz a una potencia es igual a obtener la raíz de una potencia:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^m} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \\ &= a^{\frac{m}{n}}\end{aligned}$$

Raíz de una raíz. Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva el radicando.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Simplificación de radicales

Un radical puede simplificarse, dependiendo del valor del radicando, y utilizando adecuadamente sus propiedades. Cuando se simplifica, el radical queda en su forma más sencilla y es más fácil de manipular, tanto algebraica como aritméticamente.

Remoción de potencias perfectas. Supóngase que se desea simplificar el siguiente radical $\sqrt[3]{32}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{32} &= \sqrt[3]{(8)(4)} \\ &= \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{4} \\ &= 2\sqrt[3]{4}\end{aligned}$$

Reducción del índice. La reducción del índice consiste en encontrar un índice del menor orden posible a partir de uno de mayor. Por ejemplo, redúzcase el radical $\sqrt[6]{25x^6}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{25x^6} &= \sqrt[6]{(5x^3)^2} \\ &= (5x^3)^{\frac{2}{6}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (5x^3)^{\frac{1}{3}} \\
&= \sqrt[3]{5x^3} \\
&= x\sqrt[3]{5}
\end{aligned}
$$

En este caso, el índice se redujo de orden 6 a 3.

Racionalización de denominadores. La racionalización consiste en remover todos los radicales que se encuentren en un denominador. Por ejemplo, al reducir el siguiente radical se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{8b^6x^3}} &= \sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{2^3b^6x^3} \cdot \frac{2b^2x}{2b^2x}} \\
&= \sqrt[4]{\frac{14a^3b^2xy^2}{2^4b^8x^4}} \\
&= \frac{\sqrt[4]{14a^3b^2xy^2}}{2b^2x}
\end{aligned}
$$

Para obtener un radical en su forma más simple se debe verificar que:

1. Todas las potencias perfectas hayan sido removidas.
2. El índice del radical sea de menor orden posible.
3. El radicando no sea una fracción; es decir, se ha racionalizado el denominador.

Exponente fraccionario negativo

Recuérdese que el exponente negativo implica una expresión de la forma $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Aplicando este concepto a los radicales, se obtendrá una expresión de la siguiente naturaleza:

$$
\begin{aligned}
a^{-\frac{1}{n}} &= \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt[n]{a}}
\end{aligned}
$$

En este caso, los exponentes fraccionarios negativos nos darán un denominador sin racionalizar.

Operaciones con radicales

Suma. Para realizar una adición algebraica de radicales, se debe reducir cada uno de los radicales involucrados, y después se agrupan los términos con radicales similares. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{32} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{8} &= \sqrt{(16)(2)} - \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} - \sqrt{(4)(2)} \\
&= 4\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Multiplicación. Esta operación tiene dos casos: multiplicar dos radicales con el mismo índice, donde se debe utilizar la propiedad de raíz de un producto; el segundo caso es multiplicar dos radicales de diferente índice, donde es conveniente utilizar la representación de exponentes fraccionarios y después las leyes de los exponentes.

En el primer caso:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

En el segundo caso:

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} \\ &= a^{\frac{n}{mn}} b^{\frac{m}{mn}} \\ &= (a^n b^m)^{\frac{1}{mn}} \\ &= \sqrt[mn]{a^n b^m} \end{aligned}$$

División. El cociente es una particularidad del producto, por lo que se debe operar de la misma manera que en dicha operación. Por lo tanto, también hay dos opciones: división de radicales con el mismo índice, y con índice diferente.

En el primer caso:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

En el segundo caso:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} &= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{m}}} \\ &= \frac{a^{\frac{m}{mn}}}{b^{\frac{n}{mn}}} \\ &= \sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^n}} \end{aligned}$$

En ambos casos se debe considerar la racionalización para llevar a los radicales a su mínima expresión.

Racionalización

Como ya se ha explicado, la racionalización es un método que consiste en suprimir todos los radicales de un denominador. Para ello se pueden emplear dos métodos: la racionalización por radicales y la racionalización por el conjugado.

Por radicales. Este caso ya se ha estudiado en la sección de simplificación de radicales. Por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Sin embargo, si se tuviese radicales sólo en el denominador, el proceso cambia; lo que se hace es multiplicar y dividir por el denominador para racionalizar. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{2}} &= \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

<u>Por conjugado</u>. El conjugado implica el cambio de signo a alguna de las partes que integran una expresión algebraica; sólo puede aplicarse a binomios. Por ejemplo, el conjugado de la expresión $a+b$ es $a-b$.

Aplicando este concepto a los radicales, se puede establecer una racionalización basada en la diferencia de cuadrados; es decir, en la multiplicación de una expresión algebraica por su conjugado.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\\ &= \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}\\ &= \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}\end{aligned}$$

Cabe destacar que este tipo de racionalización sólo es válida para los radicales de segundo orden, o raíces cuadradas. Para radicales de orden n, es necesario utilizar factores del tipo $a^n \pm b^n$.

Ejercicios

Simplifica las siguientes expresiones:

1. $\frac{12a^7b^6c^3z^{\frac{1}{2}}}{3a^2b^4c^3z} =$
2. $\left(\frac{3x^{-\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2} =$
3. $\left(\frac{a^{x+3y}}{a^{2x+y}}\right)^{\frac{y}{x-2y}} =$
4. $\sqrt[10]{243(2x+5)^5\sqrt[5]{(2x+5)^{25}}} =$
5. $\frac{\left(3a^2b^3c^{\frac{1}{3}}\right)^2\left(2a^3b^5c^{\frac{1}{3}}\right)}{6a^6b^{10}} =$
6. $\left(\frac{x^{a+b}}{x^b}\right)^a\left(\frac{x^{b-a}}{x^b}\right)^{a-b} =$
7. $\left(\frac{2x^3y^{-2}}{y^4z^0}\right)^{-3}\left(\frac{3x^3y^{-2}}{y^4z^0}\right)^3 =$

8. $\sqrt[5]{\frac{125a^3}{b^4}}\sqrt[5]{\frac{4a^2}{b^2}} =$
9. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{5^{12}a^{12}m^{12}}}} =$
10. $\frac{a\sqrt{256}\sqrt{\sqrt{x}}}{x\sqrt{\sqrt{a}}} =$
11. $\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}}\right)^{32} =$

Racionaliza el denominador, y simplifica las siguientes expresiones.

1. $\sqrt[4]{\frac{2a}{3a^3b^2}} =$
2. $\frac{x+5}{\sqrt[3]{x+5}} =$
3. $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} =$
4. $\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{(x+2)}+1} =$
5. $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} =$
6. $\frac{2(x-y)}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} =$
7. $\frac{\sqrt{2x-3}\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}} =$
8. $\frac{(x-y)^2-9}{\sqrt[3]{(x-3)^2}+\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{y^2}} =$
9. $\frac{(x-y+3)(x+3)}{(x+3)^2\left(\sqrt[3]{(x-3)^2}+\sqrt[3]{(x-3)y}+\sqrt[3]{y^2}\right)} =$

Productos Notables

Introducción

La multiplicación de expresiones es una operación algebraica que tiene por objeto hallar una cantidad llamada **producto**; consiste en tomar una cantidad dada, llamada **multiplicando**, y sumarla así misma tantas veces como indique otra cantidad, llamada **multiplicador**.

$$\text{Multiplicador} \longrightarrow \underbrace{3x^2}_{\text{Producto}} \longleftarrow \text{Multiplicando}$$

Para multiplicar un polinomio por otro se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, tomando en cuenta las propiedades de los exponentes, las leyes de los signos, y la multiplicación aritmética, y a continuación se efectúa la suma algebraica de todos los productos parciales obtenidos.

Dentro de la multiplicación algebraica hay una serie de productos que cumplen reglas fijas y son muy útiles al momento de estudiar la Matemática Superior; se denominan **productos notables**, y son expuestos a continuación.

Productos notables

Cuadrado de un binomio y un trinomio

Cuadrado de un binomio. Es un producto muy utilizado y fácilmente identificable; es igual a la suma del cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo. Es decir,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuadrado de un trinomio. La forma en que se obtiene este producto es similar a la anterior, sólo se añade un término extra al momento de realizar los productos. El cuadrado de un trinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término, más el doble producto del primero por el segundo, más el doble producto del segundo por el tercero, más el doble producto del primero por el tercero; o sea,

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Producto de binomios conjugados

Como se vio en el tema anterior, el conjugado de un binomio se obtiene cuando el segundo término del binomio cambia de signo. Si un binomio es multiplicado por su conjugado se obtendrá un producto notable conocido como diferencia de cuadrados; es decir, el producto de la multiplicación de un binomio por su conjugado es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Binomios que tienen un término común

Este tipo de multiplicaciones son el ejemplo general de la multiplicación algebraica de binomios. El producto es equivalente a la suma del cuadrado del término común, más el producto de la suma de los términos desiguales por el término común, más el producto de los términos desiguales; es decir,

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

En este caso si se hace $a = b$, se obtendrá un binomio al cuadrado.

Cubo de un binomio

Este producto notable esté relacionado con el cuadrado de un binomio; el resultado es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Tanto el cuadrado de un binomio como el cubo pertenecen a un desarrollo algebraico denominado el **binomio de Newton**; consiste en una serie en la cual se eleva un binomio a una potencia entera positiva.

Factorización

La factorización es el proceso inverso al desarrollo de la multiplicación; es decir, es obtener los factores de un producto con base en su resultado. Se debe destacar que la factorización no es una división como tal, sino una representación en factores de un producto.

Factor común de una expresión matemática

El factor común es la factorización más sencilla que se encuentra; consiste en obtener el máximo común divisor de una expresión algebraica. El factor común es la expresión de mayor coeficiente numérico y de mayor grado que está contenida en todos los términos de la expresión algebraica.

$$4ax^2 + 6x^3y - 2bx^4 - 8x^5z = 2x^2(2a + 3xy - bx^2 - 4x^3z)$$

En el ejemplo anterior, el factor común en todos los términos es $2x^2$. El mayor coeficiente es -8; sin embargo, el mayor coeficiente en todos los términos es 2, ya que todos los términos sólo pueden dividirse entre 2 y entre 1 sin obtener fracciones. El mayor exponente es 5; pero las potencias presentes en todos los términos son x^2 y x, siendo el cuadrado la mayor.

Trinomio cuadrado perfecto

Proviene del binomio al cuadrado.

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= (a + b)^2 \end{aligned}$$

Diferencia de cuadrados

Es el producto de la multiplicación de dos binomios conjugados.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Trinomios de segundo grado

Este tipo de factorización son los de mayor dificultad; pueden resolverse de diferentes formas.

Tipo 1, el término cuadrático tiene un coeficiente unitario. Son de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$; para obtener sus factores se debe colocar en cada binomio la raíz del término cuadrático, y el segundo término de cada factor debe cumplir con que su suma es igual al segundo término del trinomio y su producto es igual al tercer término del trinomio.

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Tipo 2, el término cuadrático no tiene coeficiente unitario. Éstos trinomios tiene la forma $acx^2 + (ad + bc)x + bd$; en este caso los factores se obtienen por dos métodos. El primero es multiplicar toda la expresión por el coeficiente del término cuadrático y operar como si se tuviese un trinomio del tipo 1; para finalizar se dividen los factores entre el coeficiente utilizado para multiplicar la expresión.

$$\begin{aligned} acx^2 + (ad + bc)x + bd &= ac[acx^2 + (ad + bc)x + bd] \\ &= a^2c^2x^2 + ac(ad + bc)x + abcd \\ &= (acx)^2 + (ad + bc)(acx) + abcd \\ &= \frac{1}{ac}(acx + bc)(acx + ad) \\ &= \frac{acx + bc}{c} \cdot \frac{acx + ad}{a} \\ &= (ax + b)(cx + d) \end{aligned}$$

En el segundo método se opera basándose en el concepto de factor común, utilizándose tantas veces como sea necesario hasta obtener los dos binomios.

$$\begin{aligned} acx^2 + (ad + bc)x + bd &= acx^2 + adx + bcx + bd \\ &= ax(cx + d) + b(cx + d) \\ &= (ax + b)(cx + d) \end{aligned}$$

Ambos métodos se pueden utilizar indistintamente, todo depende de la destreza, facilidad y gusto para dominar cada método.

Suma y diferencia de cubos

Se pueden descomponer como producto de dos factores, de modo que el primer factor sea un binomio formado por las raíces cúbicas de cada término, y el segundo factor sea un trinomio formado por la suma de los cuadrados de los términos más el producto simple de las raíces cúbicas. Cabe destacar que los signos de los términos de los factores dependen de si se trata de una suma o una diferencia de cubos.

En el caso de la suma $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$; mientras que la resta queda como $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 +$ *ab+b2*.

Suma y diferencia de potencias enésimas

Para este tipo de factorizaciones se puede verificar por medio de la multiplicación que

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^4 - b^4 &= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \\ a^5 - b^5 &= (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \\ a^6 - b^6 &= (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) \\ &\vdots \\ a^n - b^n &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

Donde n es un entero positivo cualquiera a partir de 2.

Análogamente, se puede verificar que

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^5 + b^5 &= (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\ &\vdots \\ a^n + b^n &= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

Donde n es cualquier entero positivo impar a partir de 3.

Ejercicios

Obtén el desarrollo de las siguientes expresiones:

1. $(3-2x^2)^2 =$
2. $(y+3)(y-5) =$
3. $(ab^2-2b)^3 =$
4. $(x+y+3)^2 =$
5. $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2) =$

Obtén la factorización de las siguientes expresiones.

1. $16m^2-40mn+25n^2 =$
2. $z^4-10z^2+9 =$
3. $2x^6y-6x^4y^3-8x^2y^5 =$
4. $1-x^8 =$
5. $64x^3+125y^2 =$
6. $x^6-7x^3-8 =$
7. $a^5+b^5 =$
8. $a^4+a^2b^2+b^4 =$
9. $16a^2+10bc-25c^2-b^2 =$
10. $x^2+y^2-4z^2+2xy+3xz+3yz =$
11. $x^3y^3-y^3+8x^3-8 =$
12. $10-x-3x^2 =$
13. $6x^2-xy-12y^2 =$
14. $x^2+10(x-y)-2xy+9+y^2 =$
15. $27x^2-3xy-2y^2 =$

Logaritmos

Introducción

Los logaritmos fueron divulgados en 1614 por el matemático escocés John Neper, que determinó sus propiedades a partir de la relación existente entre las progresiones aritméticas y geométricas.

El logaritmo de un número respecto a otro, llamado base, es el exponente al cual se eleva la base para obtener el primer número. Por ejemplo, si se tienen las potencias de dos

$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$
$$2^4 = 16$$
$$2^5 = 32$$

Entonces, los logaritmos correspondientes son

$$\log_2 2 = 1$$
$$\log_2 4 = 2$$
$$\log_2 8 = 3$$
$$\log_2 16 = 4$$
$$\log_2 32 = 5$$

Para este ejemplo en particular, la base de todos los logaritmos es dos. En general, sí se cumple que $x^y = z$, se tiene que $\log_x z = y$. Esto permite deducir que la operación de extraer logaritmos es, llamada logaritmación, un proceso inverso a la exponenciación; es decir, mientras que la exponenciación encuentra una potencia a partir de la base y el exponente, la logaritmación halla un exponente a partir de la base y la potencia.

Para que en una base cualquiera el logaritmo de un número natural sea otro número natural, es condición indispensable que el número dado sea una potencia exacta de la base. Así, por ejemplo, se tiene que

$$\log_5 25 = 2 \;\Rightarrow\; 5^2 = 25$$

$$\log_3 27 = 3 \;\Rightarrow 3^3 = 27$$

$$\log_4 16 = 2 \;\Rightarrow 4^2 = 16$$

Ahora bien, $\log_4 5$ no será un número natural puesto que 5 no es una potencia exacta de 4.

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos presentan una serie de propiedades importantes, que es necesario conocer e identificar al momento de realizar ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Base negativa

La base de un sistema de logaritmos no puede ser un número negativo. Si la base fuese un número negativo sus potencias impares serían números negativos y sus potencias pares serían números positivos, con lo cual se obtendría una serie de números positivos y negativos que se alternarían y, por lo tanto, no todos los números positivos tendrían logaritmo en dicha base.

$$\log_{-x} y = \nexists$$

Logaritmos de números negativos

No pueden hallarse logaritmos de números negativos. Puesto que la base debe ser un número positivo todas sus potencias son positivas, y por lo tanto, los números negativos no pueden ser potencia de ninguna base.

$$\log_x(-y) = \nexists$$

Logaritmo de la base

En cualquier sistema de logaritmos, el logaritmo de la base siempre es igual a la unidad. Esta propiedad se cumple al verificar que cualquier número elevado a la potencia unitaria será dicho número.

$$\log_x x = 1 \iff x^1 = x$$

Logaritmo nulo

En cualquier sistema de logaritmos, el logaritmo de la unidad es cero. Se parte de la propiedad de que cualquier número elevado a la cero es uno.

$$\log_x 1 = 0 \iff x^0 = 1$$

Logaritmos negativos

Los números menores que la unidad tienen logaritmos negativos. En efecto, para cualquier número decimal positivo y sin entero se cumplirá que

$$\log_x y < 0 \iff 0 < y < 1$$

Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto coincide con la suma de los logaritmos de los factores; es decir,

$$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$$

Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es igual a la resta del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador:

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es equivalente al producto del exponente por el logaritmo. En otras palabras,

$$\log_x a^b = b \cdot \log_x a$$

<u>Logaritmo de una raíz</u>. El logaritmo de una raíz es igual al cociente del logaritmo del radicando entre el índice de la raíz; es decir,

$$\log_x \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_x a$$

Cambio de base de los logaritmos

Es posible obtener un logaritmo de un número *a* en una base *x* a partir del logaritmo de *a* en una base *y*. Para ello se tiene que

$$(1) \ldots \log_x a = X \Rightarrow x^X = a$$
$$(2) \ldots \log_y a = Y \Rightarrow y^Y = a$$

Por lo tanto, se tiene que $x^X = y^Y$. Tomando logaritmos en base x a ambos lados, aplicando propiedades, y despejando Y se tiene que

$$\log_x x^X = \log_x y^Y$$

$$X \cdot \log_x x = Y \cdot \log_x y$$

$$x \cdot \frac{\log_x x}{\log_x y} = Y$$

$$\frac{X}{\log_x y} = Y \ldots (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) se tiene que

$$\frac{\log_x a}{\log_x y} = \log_y a$$

Por ejemplo, sabiendo que $\log_2 8 = 3$, calcúlese $\log_{16} 8$.

$$\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} \Rightarrow \frac{3}{4}$$

Logaritmos de base diez

El sistema de logaritmos en base diez es un caso de estudio especial; habitualmente se les conoce como logaritmos comunes, logaritmos vulgares o logaritmos de Briggs. Su notación puede ser abreviada, ya que la base se suele omitir dando a entender que se trata de un logaritmo en base diez; es decir, se tiene que $\log_{10} x = \log x$.

Número x	0.001	0.01	0.1	1	10	100
Forma exponencial	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2
$\log x$	-3	-2	-1	0	1	2

Es obvio que la cantidad $10^{1.5377}$ es mayor que 10 y menor que 100; además, se puede calcular que el número resultante es $10^{1.5377} = 34.49$ ó $\log 34.49 = 1.5377$. En este caso, la parte entera es conocida como **característica** y la parte decimal se llama **mantisa**. Para el ejemplo, se tiene que la característica es 1, y la mantisa es 0.5377.

Característica

Para determinar la característica de un logaritmo común se debe realizar una inspección de acuerdo a las siguientes reglas:

Para un número mayor a 1, la característica es positiva y es menor en uno que el número de dígitos del entero. Por ejemplo,

Número	4789	999	671.87	94.68	31	3.67	5
Característica	3	2	2	1	1	0	0

Para un número menor que 1, la característica es negativa y es mayor en uno que el número de ceros inmediatamente después del punto decimal. Por ejemplo,

Número	0.4789	0.0999	0.0671	0.0094	0.0031	0.0003	0.0005
Característica	− 1	− 2	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4

Mantisa

La mantisa deberá obtenerse por medio de las tablas de logaritmos comunes. Por ejemplo, si se desea obtener $\log 728$, primero se debe buscar en la comuna N el número 72, y después en forma horizontal hacia la derecha a la columna 8; se encontrará que la mantisa es 8621. Analizando el número se observa que la característica es 2; por lo tanto, se tendrá que $\log 728 = 2.8621$.

Ejercicios

Determina el valor de cada incógnita.

1. $\log_b 216 = 3$
2. $\log_x 32768 = 5$
3. $\log_4 256 = n$
4. $\log_6 1296 = y$

Si $\log 2 = 0.301$ $\log 3 = 0.477$, y $\log 5 = 0.699$, calcula los siguientes logaritmos.

1. $\log 900 =$
2. $\log 12 =$
3. $\log 180 =$
4. $\log_6 270 =$
5. $\log_2 60 =$
6. $\log_5 48 =$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

1. $\log_{27} x = \frac{1}{3}$
2. $\log_2 x = 5$
3. $\log_{16} x = \frac{1}{4}$
4. $\log 4m = 3$
5. $4^y + 2^{y+3} = 64$
6. $\log(x-2) + \log x = \log 8$
7. $\log(\log x) = 1.1761$
8. $\log_{\mathrm{b}}[(3x-4)(5x+2)] - \log_{\mathrm{b}}(5x+2) - \log_{\mathrm{b}} 15 = 0$
9. $4^{x+9} = 4^{3x^2+22x-45}$
10. $\log(x+2) + \log(x-5) = \log(x-3) + 1$